Une sorcière, trois parapluies, un poisson

Michel Coste

Une sorcière, trois parapluies, un poisson

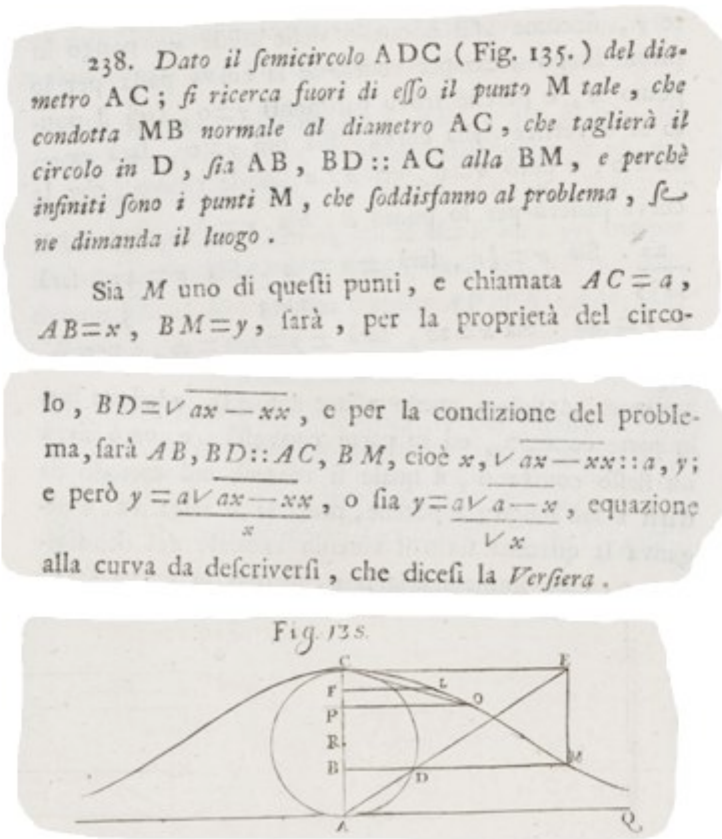
Le 4 avril 2010, par **Michel Coste**

Professeur à l' Institut de Recherche Mathématique de Rennes.
Université de Rennes I (**page web**)

À l'aide des coordonnées cartésiennes, on peut décrire des objets géométriques par des équations. Par exemple, dans le plan, l'équation $y = 2x - 3$ ***décrit une droite ; l'équation*** $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ***décrit le cercle de centre le point de coordonnées*** (a, b) ***et de rayon*** r***. Dans l'espace, avec cette fois-ci trois coordonnées, l'équation*** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ***décrit la sphère de centre l'origine et de rayon*** 1***. L'équation*** $z^2 = x^2 + y^2$ ***décrit une autre surface, un cône de révolution. Nous allons rencontrer dans la suite des surfaces, toujours décrites par une équation dans l'espace, qui ont la particularité d'être munies d'un manche, telles des parapluies.***

La sorcière et son parapluie [1]

DANS le catalogue des courbes célèbres, on trouve la « sorcière d'Agnesi ». Cette courbe a été étudiée par la mathématicienne italienne Maria Gaetana Agnesi (qui n'avait rien d'une sorcière !) dans son traité *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* paru en 1748. Vous pouvez voir ci-contre un extrait de ce traité où la courbe (appelée « Versiera » par Agnesi) est introduite :



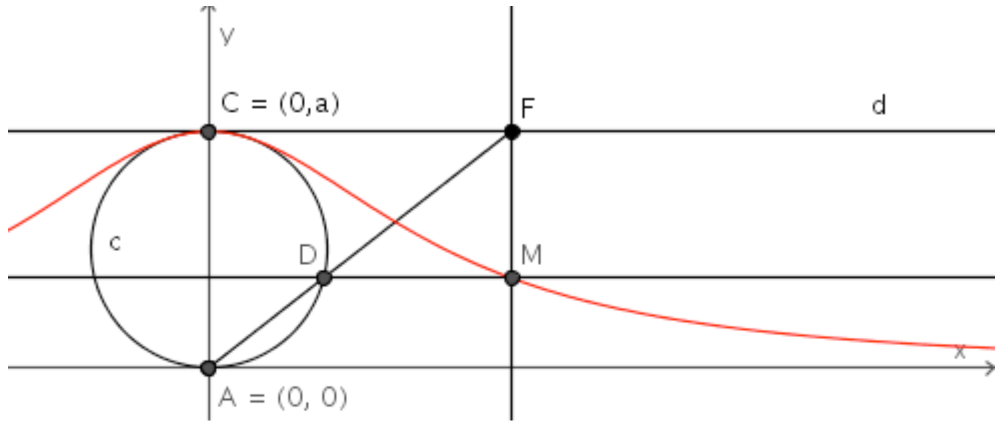
238. *Dato il ſemicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC ; *ſi ricerca fuori di eſſo il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *ſia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti ſono i punti* M, *che ſoddisfanno al problema, ſe ne dimanda il luogo.*

Sia M uno di queſti punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, ſarà, per la proprietà del circolo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, ſarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax-xx} :: a, y$; e però $y = \frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$, o ſia $y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da deſcriverſi, che diceſi la *Verſiera*.

L'ouvrage d'Agnesi a connu un grand succès, et c'est en fait à l'erreur d'un traducteur anglais qu'on doit le nom de « sorcière » attaché à cette courbe.

Reprenons la construction décrite par Agnesi en gardant ses notations, sauf que nous noterons x l'abscisse et y l'ordonnée. On part du cercle C de diamètre

AC, où $A = (0,0)$ est l'origine et $C = (0,a)$ est sur l'axe des y. Soit d la droite horizontale, tangente au cercle c en C. Traçons une droite passant par A ; cette droite coupe la droite d en un point F et recoupe le cercle c en un point D. Soit M le point qui a même abscisse que F et même ordonnée que D. Quand on fait tourner la droite autour de A, le point M parcourt une courbe, en rouge sur le dessin ci-dessous : c'est la sorcière d'Agnesi.



Trouvons maintenant l'équation de la sorcière d'Agnesi. Pour commencer, il est facile de trouver l'équation du cercle c qui a pour centre $(0, a/2)$ et pour rayon $a/2$; c'est :

$$x^2 + y^2 - ay = 0 \ .$$

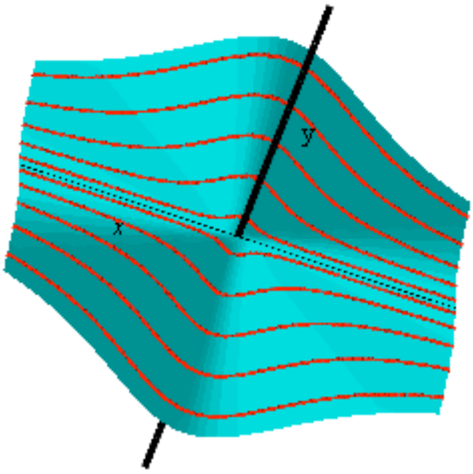
Prenons un point $M = (x, y)$ sur la sorcière d'Agnesi. Alors F a pour coordonnées (x, a). Le point D est l'image de F par l'homothétie de centre l'origine A et de rapport $\dfrac{y}{a}$; ses coordonnées sont donc $\left(\dfrac{xy}{a}, y\right)$. On écrit que D satisfait l'équation du cercle c, ce qui donne $\dfrac{x^2y^2}{a^2} + y^2 - ay = 0$, ou encore $\dfrac{y}{a^2}((x^2 + a^2)y - a^3) = 0$. Comme on a $y \neq 0$, on trouve comme équation de la sorcière d'Agnesi :

$$(x^2 + a^2)y = a^3 \ .$$

Cette courbe à l'allure si sage semble ne rien avoir de bien sorcier. Elle a cependant un petit tour de sorcellerie dans son sac, que nous allons découvrir maintenant. On peut faire varier la longueur a. Remplaçons a par une nouvelle coordonnée z de sorte que l'on obtient ainsi l'équation d'une surface dans l'espace rapporté aux coordonnées x, y, z :

$$(x^2 + z^2)y = z^3 \ .$$

Si on coupe cette surface par le plan $z = a$, on retrouve notre sorcière d'Agnesi. Quand a approche de 0, la sorcière s'aplatit sur l'axe des x. Mais, surprise ! Quand on prend la tranche de la surface correspondant à $z = 0$, on trouve l'équation $x^2 y = 0$ qui est bien satisfaite par tous les points de coordonnées $(x, 0, 0)$ formant l'axe des x, mais aussi par tous les points $(0, y, 0)$ de l'axe des y. Le dessin de la surface dans l'espace comprend une droite incongrue, l'axe des y, venue semble-t-il de nulle part. Et pourtant, elle fait bien partie de la surface !



Notre surface se retrouve ainsi comme un parapluie — le parapluie de la sorcière — un peu chahuté par le vent, fixé à un manche (l'axe des y). Pas moyen, du point de vue des équations, d'avoir la toile du parapluie sans son manche ! Essayons de préciser un peu cette affirmation. Considérons pour cela une équation voisine de celle du parapluie de la sorcière :

$$(x^2 + z^2)\,y = 0 \ .$$

Les points qui vérifient cette équation sont soit les points du plan $y = 0$ soit les points $(0, y, 0)$ de l'axe des y (ceux qui vérifient $x^2 + z^2 = 0$). On a aussi un parapluie (passablement plat, celui-ci), formé d'un plan et d'une droite perpendiculaire au plan. Mais ici le manche est détachable : on peut démonter le parapluie en sa toile d'équation $y = 0$ et son manche d'équation $x^2 + z^2 = 0$. Par contre on peut montrer que toute équation algébrique vérifiée par les points de la toile du parapluie de la sorcière est aussi vérifiée par les points du manche.

Le parapluie de la sorcière est parfois appelé « parapluie de Cartan ». Il est donné comme exemple de phénomènes un peu bizarres distinguant la géométrie analytique réelle de sa cousine complexe dans un article de Henri Cartan publié en 1957 [2] mais aussi dans un article de Hassler Whitney publié la même année [3] .

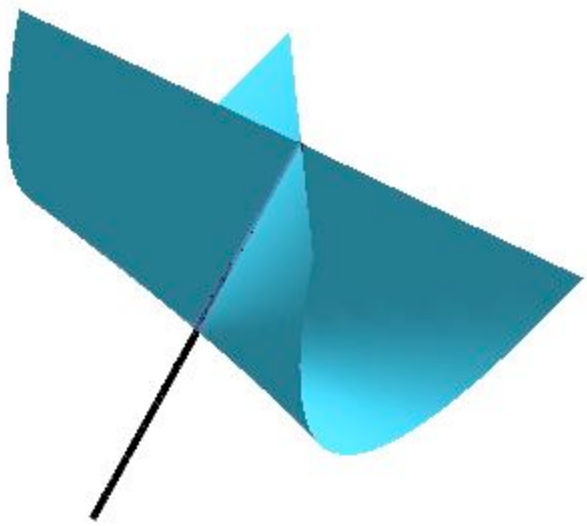
Un parapluie pincé

Le deuxième parapluie de notre histoire appartient justement à Hassler Whitney. Il est déjà apparu dans un précédent objet du mois intitulé ***Le pli et la fronce***, où il était décrit comme l'image d'une fonction du plan $\mathbb{R}^2$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui envoie le point (t, u) du plan sur le point de l'espace de coordonnées $x = t, y = tu, z = u^2$.

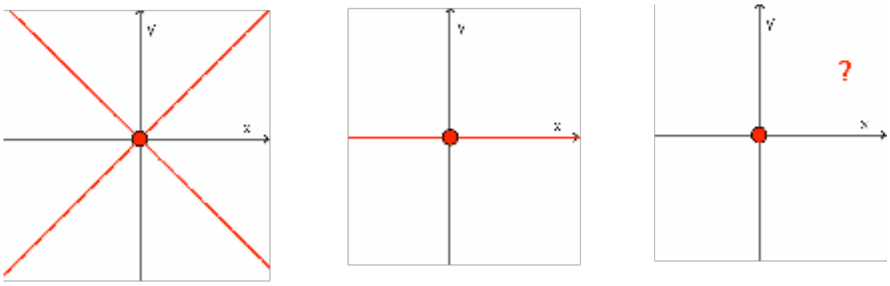
Cherchons à décrire cet objet par une équation ; on remarque que $y^2 = t^2u^2$ est égal à x^2z, ce qui nous donne l'équation

$$x^2 z = y^2 \ .$$

De nouveau, un phénomène bizarre se produit : il y a des points de l'espace qui satisfont cette équation et qui ne proviennent pas de points du plan ! La surface se retrouve affublée d'un manche. Cette fois-ci, le parapluie a été tellement chahuté par le vent qu'il est pincé le long de la moitié du manche, qui est l'axe des z. Il reste toujours une demi-droite qui pointe en dehors de la toile. Le manche du parapluie de Whitney n'est pas plus détachable que celui de son collègue Cartan.



Analysons le phénomène de plus près, en coupant la surface d'équation $x^2 z = y^2$ par des plans $z = a$. Si a est un nombre positif, l'équation $y^2 = a x^2$ décrit la réunion de deux droites se coupant en l'origine : les droites $y = \sqrt{a}\, x$ et $y = -\sqrt{a}\, x$. Si $a = 0$ les deux droites se confondent en une seule, $y = 0$. Et si a est négatif, alors les deux droites disparaissent en ne laissant comme trace que leur point d'intersection, l'origine $x = y = 0$, tel le chat du Cheshire dans *Alice au pays des merveilles* qui disparaissait en ne laissant que son sourire. Vous avez sans doute déjà vu des droites sans point d'intersection ; ici, vous voyez un point d'intersection sans droites.



Où sont passées les droites ? Si vous avez déjà rencontré les nombres complexes (par exemple dans **les chapitres 5 et 6 du film *Dimensions***), vous pouvez deviner la réponse : elles sont devenues imaginaires ! Par exemple, si on coupe à $z = -1$, on obtient l'équation $y^2 = -x^2$ qui décrit la réunion des deux droites de pentes imaginaires i (vérifiant $i^2 = -1$) et $-i$: $y = ix$ et $y = -ix$.

Un poisson dans un parapluie

Le troisième parapluie présenté ici est ce qu'on appelle un **discriminant**. Beaucoup connaissent le discriminant d'un polynôme du second degré $a\,t^2 + b\,t + c$: c'est $b^2 - 4\,a\,c$. Le discriminant s'annule précisément quand le polynôme a une racine double. Le polynôme a deux racines réelles quand le discriminant est positif et aucune quand le discriminant est négatif. On peut « normaliser » notre polynôme du second degré pour obtenir simplement un polynôme de la forme $t^2 + c$: on se ramène à $a = 1$ en divisant par le coefficient de t^2 puis on « complète le carré » pour obtenir $(t + b/2)^2 + c - b^2/4$; on prend $t + b/2$ comme nouvelle indéterminée, et on rebaptise c le terme constant $c - b^2/4$. Le discriminant du polynôme normalisé du second degré $t^2 + c$ est alors réduit à sa plus simple expression : $-4c$.

Le discriminant du polynôme du troisième degré est moins connu. On peut comme ci-dessus normaliser le polynôme en se ramenant d'abord à avoir 1 comme coefficient de t^3, puis en « complétant le cube » ainsi :

$$t^3 + a\,t^2 + b\,t + c = (t + a/3)^3 + \text{un polynôme du premier degré}\ ,$$

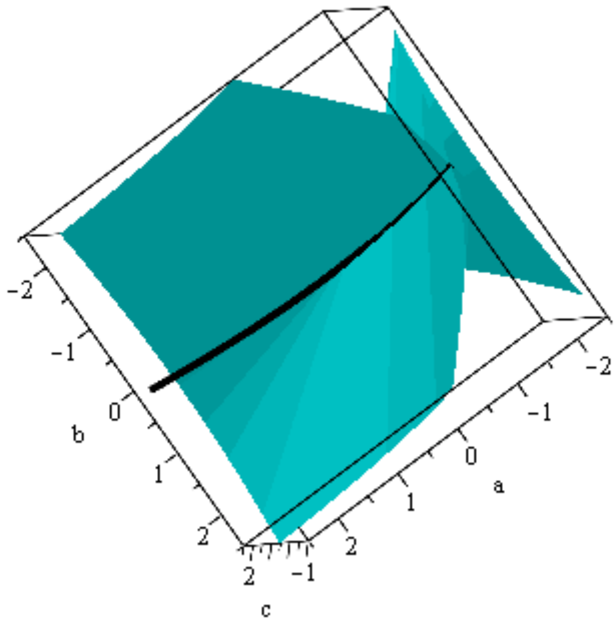
et enfin en prenant $t + a/3$ comme nouvelle indéterminée. On se ramène de cette façon à un polynôme de la forme $t^3 + b\,t + c$. Le discriminant de ce polynôme est $-4\,b^3 - 27\,c^2$. Il s'annule si et seulement si le polynôme a une racine double. Quand le discriminant est positif, le polynôme a trois racines réelles et il n'en a plus qu'une quand le discriminant est négatif.

Quant au discriminant du polynôme du quatrième degré $t^4 + a\,t^2 + b\,t + c$ (on laisse la lectrice deviner comment se débarrasser du terme en t^3), sans doute personne ne pourrait le réciter par cœur :

$$\Delta = -4\,a^3\,b^2 - 27\,b^4 + 16\,a^4\,c - 128\,a^2\,c^2 + 144\,a\,c\,b^2 + 256\,c^3\ .$$

De nouveau, le discriminant s'annule quand le polynôme a une racine double. Pour ce qui est du nombre de racines réelles, c'est un petit peu plus compliqué que précédemment : si le discriminant est positif, le polynôme a quatre racines réelles, ou pas du tout ; si le discriminant est négatif, le polynôme a deux racines réelles.

Dessinons maintenant la surface d'équation $\Delta = 0$ dans l'espace des coefficients (a, b, c). Voici ce qu'on obtient :

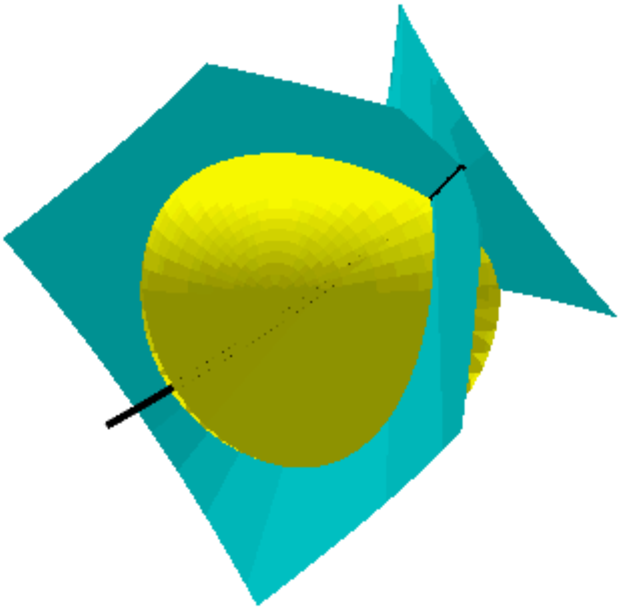


On constate sur le dessin que ce parapluie a été sérieusement endommagé. La toile du parapluie présente des coins, et est pincée le long de la moitié du manche tordu dont l'autre moitié pointe hors de la toile. On devine sur le dessin que le parapluie est symétrique par rapport au plan $b = 0$, et ceci est confirmé par le fait que Δ ne contient que des puissances paires de b, et est donc inchangé quand on remplace b par $-b$. Le manche est situé dans ce plan de symétrie et on peut l'identifier en faisant $b = 0$ dans Δ et en factorisant ; on obtient

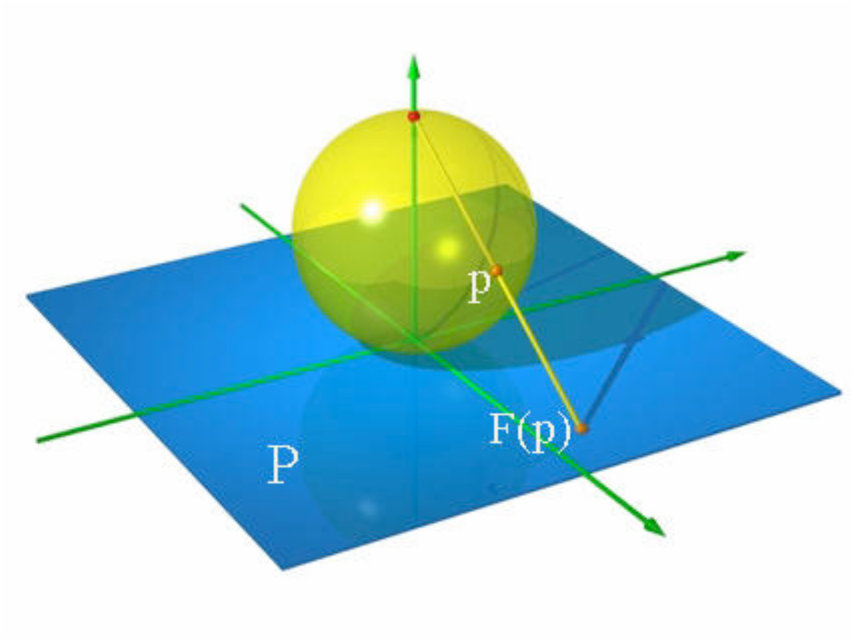
$$16\, c\, (-4\, c + a^2)^2 \ .$$

Le manche courbe de ce parapluie est donc la parabole $c = a^2/4$ dans le plan $b = 0$.

Et où donc est le poisson promis dans le titre ? Il apparaît quand on coupe le parapluie par une sphère centrée en l'origine.

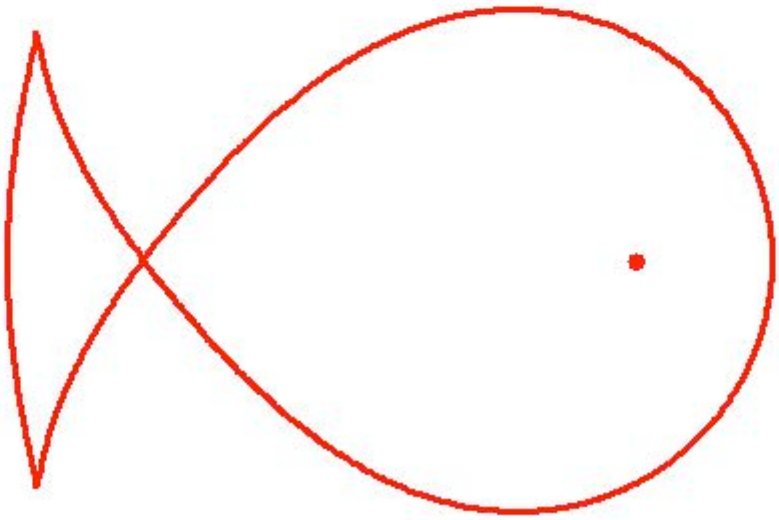


Pour donner une image plate de l'intersection du parapluie avec une sphère, nous allons utiliser la projection stéréographique de la sphère sur le plan. Voici un dessin qui explique comment cette projection depuis le pôle nord de la sphère envoie un point p de celle ci sur le point $F(p)$ du plan.



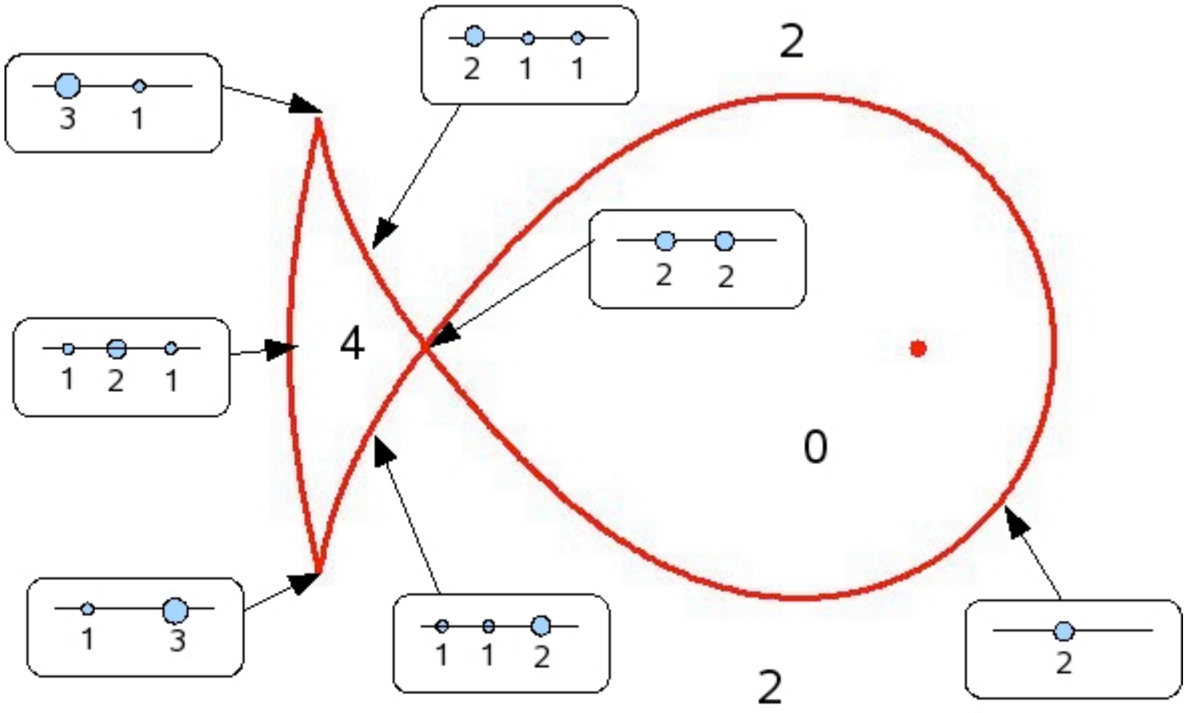
Cette illustration est extraite du **chapitre 1 du film *Dimensions***, où vous pouvez voir la projection stéréographique en action.

Voici la coupe du parapluie par la sphère de rayon 2, aplatie par une projection stéréographique :

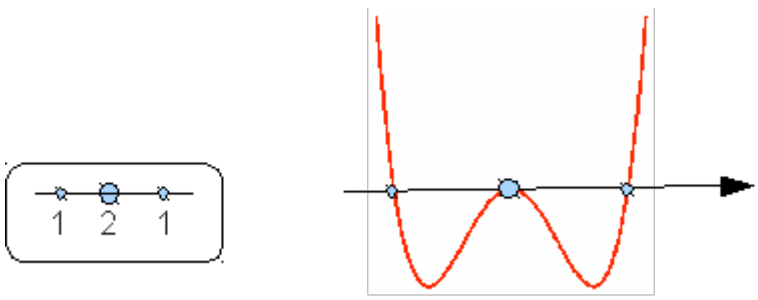


La partie du manche le long de laquelle la toile du parapluie est pincée donne le point d'attache de la queue du poisson ; celle qui pointe hors de la toile donne l'œil du poisson.

Revenons à la nature de ce parapluie : le discriminant Δ du polynôme du quatrième degré. Ce discriminant est nul quand le polynôme a des racines multiples. On montre aussi que le nombre de racines réelles ne peut changer que quand on traverse l'endroit où le discriminant est nul. On peut repérer le nombre de racines réelles sur le poisson : la queue du poisson correspond au domaine où le polynôme a quatre racines réelles, le corps au domaine où le polynôme a zéro racine réelle ; le discriminant Δ est positif sur ces deux domaines. L'eau dans laquelle nage le poisson correspond au domaine où le discriminant est négatif, et où le polynôme a deux racines réelles. La disposition des racines réelles et leurs multiplicités pour les polynômes correspondant au contour du poisson est symbolisée par ce schéma :



Dans chaque cartouche, les points bleus indiquent la disposition des racines sur la droite réelle ; la taille du point représente la multiplicité de la racine, aussi indiquée par le nombre en dessous du point. Voici par exemple l'allure d'un polynôme correspondant à l'un des cartouches.



Mais alors, que se passe-t-il à l'œil du poisson ? Rappelons que sur cette partie du manche qui dépasse hors de la toile, on a $b = 0$, $a > 0$ et $c = a^2/4$. L'œil du poisson correspond donc à un polynôme de la forme $t^4 + a\,t^2 + a^2/4 = (t^2 + a/2)^2$ avec $a > 0$. Ici encore, l'explication est à rechercher dans le complexe : le polynôme a deux racines doubles imaginaires conjuguées, $i\sqrt{a/2}$ et $-i\sqrt{a/2}$. Il se passe bien quelque chose, mais on ne s'en aperçoit pas dans le réel.

Notes

[▲1] Mes remerciements à Daniel Pecker qui, il y a longtemps, m'avait fait voir la sorcière d'Agnesi dans le parapluie de Cartan.

[2] **Henri Cartan**, *Variété analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, Bulletin de la Société Mathématique de France 85 (1957), p. 77 à 99.

[3] **Hassler Whitney**, *Elementary structure of real algebraic varieties*, Annals of Mathematics 66 (1957), p. 545 à 556.

Crédits images

Pour citer cet article : **Michel Coste**, **Une sorcière, trois parapluies, un poisson**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Une-sorciere-trois-parapluies-un.html`